2020 / 12 / 3 المحاضرة 14

. حل التمرين من المحاضرة 12:

$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$f_1(x) = x$ $\qquad$ $f_2(x) = -x$

$f_3(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f_4(x) = -\frac{1}{x}$

. أثبت أن $(G, \circ)$ زمرة تبديلية

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

$A \to B \to C$

$g \circ f$

$g(f(x))$

• $f_1 \circ f_1(x) = f_1(f_1(x))$
$= f_1(x) = x$

$f_2 \circ f_2(x)$
$= f_2(f_2(x))$
$= f_2(-x)$
$= -(-x)$
$= x = f_1$

• $f_2 \circ f_1(x) =$
$f_2(f_1(x))$
$= f_2(x)$
$= -x$
$= f_2$

• $f_2 \circ f_4(x) = f_2(-\frac{1}{x})$
$= -(-\frac{1}{x})$
$= \frac{1}{x} = f_3$

• $f_3 \circ f_2(x) = f_3(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

• $f_3 \circ f_3(x) = f_3(\frac{1}{x}) = x$

• $f_3 \circ f_4(x) = f_3(-\frac{1}{x}) = -x$

• $f_4 \circ f_2(x) = f_4(-x) = \frac{1}{x}$

. إن $\circ$ عملية داخلية وذلك واضح من الجدول

. $\circ$ تبديلية لأن الجدول متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي .

. $\circ$ تجميعية

. المحايد f_1 وضوحاً من الجدول .

. نظير f_1 هو $f_1 \in G$

. نظير f_2 هو $f_2 \in G$

. نظير f_3 هو $f_3 \in G$

. نظير f_4 هو $f_4 \in G$

. طلب إضافي : هل G زمرة دوارة ؟

. نلاحظ أن f_1 مرتبته $= 1$ (لأن f_1 هو المحايد)

. مرتبة f_2 هي 2 لأن $f_2^1 \neq f_1$ و $f_2^2 = f_1$

. مرتبة f_3 هي 2 لأن $f_3^1 \neq f_1$
$f_3^2 = f_1$

. مرتبة f_4 هي 2 لأن $f_4^1 \neq f_1$
$f_4^2 = f_1$

. إذاً G ليست دوارة ، وهي من الشكل

$\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z}$

- الحلقة -

. لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخلي $\star_1, \star_2$.

. نقول عن $(A, \star_1, \star_2)$ أنها حلقة إذا تحقق :

1. $(A, \star_1)$ زمرة تبديلية نرمز لمحايدها بـ e .
2. $\star_2$ تجميعي
3. $\star_2$ توزيعي على $\star_1$

ملاحظة :

1) نقول عن الحلقة $(A, \star_1, \star_2)$ أنها حلقة تبديلية إذا كان $\star_2$ تبديلي .

2) نقول عن الحلقة $(A, \star_1, \star_2)$ أنها حلقة واحدية إذا كان $\star_2$ يملك محايد .

مثال :

• $(N, +, \cdot)$ ليست حلقة لأن قانون $+$ لا يحقق قانون النظير .

• $(Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة

• $(Q, +, \cdot)$ حلقة واحدية تبديلية

• $(Q^*, +, \cdot)$ ليست حلقة لأن الجمع لا يتوزع على الضرب

$(U_n, +, \cdot)$

هل تمثل حلقة؟ $\left(\frac{Z}{nZ}, +, \cdot\right)$

نعم حلقة تبديلية واحدية

$$\bar{a}\cdot(\bar{b} \cancel{f} + \bar{c}) = a\cdot(\overline{b+c})$$
$$= \overline{a\,(b+c)}$$
$$= \overline{(a\cdot b) + a\cdot c}$$
$$= \overline{(a\cdot b)} + \overline{a\cdot c}$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{b}) + \bar{a}\cdot\bar{c}$$

انتهت المحاضرة